Semaine 1: dérivées

Correction 1

- La réponse a. est fausse :
La tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0 est parallèle à l'axe des abscisses. On en déduit que le nombre dérivé de la fonction f en 0 vaut 0

- La réponse b. est fausse :
Un nombre dérivée de 0 en -1 entrainerai une tangente parallèle à l'axe des abscisses au point d'abscisse -1 de la courbe $\mathscr{C}_f$.
Or, on voit que la courbe $\mathscr{C}_f$ n'admet pas une telle tangente au point d'abscisse -1.

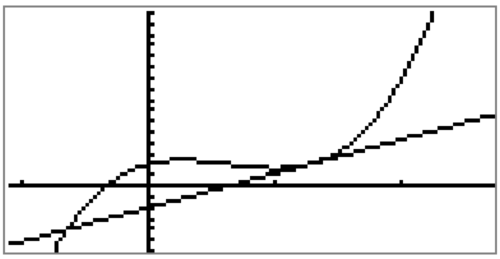
- La réponse correcte est c. :
La tagente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse -3 est une droite passant par les points $A(-4\,;4)$ et $B(-2\,;2)$.
Le coefficient directeur de cette tangente a pour valeur :
$$\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{2-4}{(-2)-(-4)}=\frac{-2}{-2+4}=\frac{-2}{2}=-1$$

Correction 2

1. a. La fonction dérivée f' de la fonction f admet pour expression :
$$f'(x)=\frac{1}{2}\cdot(3\cdot x^2)-\frac{3}{2}\cdot(2\cdot x)+1=\frac{3}{2}\cdot x^2-3\cdot x+1$$
b. On en déduit l'image du nombre dérivée en 2 de la fonction f :
$$f'(2)=\frac{3}{2}\times 2^2-3\times 2+1=6-6+1=1$$

2. a. Le point de $\mathscr{C}_f$ ayant pour abscisse 2 a pour coordonnées $\big(2\,;f(2)\big)$.
Déterminons l'image du nombre 2 par la fonction f :
$$f(2)=\frac{1}{2}\times 2^3-\frac{3}{2}\times 2^2+2+1=4-6+2+1=1$$
Ainsi, le point A a pour coordonnées $A(2\,;1)$.
b. La formule donnant l'équation réduite d'une tangente permet d'obtenir l'équation réduite de la tangente (T) :
$$y=f'(2)\cdot\big(x-2\big)+f(2)$$
$$y=1\cdot\big(x-2\big)+1$$
$$y=x-2+1$$
$$y=x-1$$

3. Voici la représentation des deux courbes de ces fonctions à l'aide d'une calculatrice :



Correction 3

1. La fonction f admet pour fonction dérivée f' dont l'expression est :
$$f'(x)=\frac{1}{2}\cdot 3x^2-\frac{3}{4}\cdot 2x-\frac{5}{2}=\frac{3}{2}\cdot x^2-\frac{3}{2}\cdot x-\frac{5}{2}$$

2. b. Le nombre dérivée de la fonction f en -1 a pour valeur :
$$f'(-1)=\frac{3}{2}\cdot(-1)^2-\frac{3}{2}\cdot(-1)-\frac{5}{2}=\frac{3}{2}+\frac{3}{2}-\frac{5}{2}=\frac{1}{2}$$
c. D'après la question précédente, la droite (d) doit avoir un coefficient directeur de $\frac{1}{2}$: la droite (d) est parallèle à la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse -1.
L'image de -1 par la fonction f a pour valeur :
$$f(-1)=\frac{1}{2}\cdot(-1)^3-\frac{3}{4}\cdot(-1)^2-\frac{5}{2}\cdot(-1)+\frac{3}{2}$$
$$=-\frac{1}{2}-\frac{3}{4}+\frac{5}{2}+\frac{3}{2}=-\frac{2}{4}-\frac{3}{4}+\frac{10}{4}+\frac{6}{4}=\frac{11}{4}$$
Ainsi, la courbe $\mathscr{C}_f$ passe par le point de coordonnées $\Big(-1\,;\frac{11}{4}\Big)$.
Montrons que la droite (d) passe également par ce point :
$$g(-1)=\frac{1}{2}\cdot(-1)+\frac{13}{4}=-\frac{2}{4}+\frac{13}{4}=\frac{11}{4}$$
On vient de montrer que la droite (d) est bien la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse -1.

3. a. Résolvons l'équation suivante :
$$f'(x)=\frac{1}{2}$$
$$\frac{3}{2}\cdot x^2-\frac{3}{2}\cdot x-\frac{5}{2}=\frac{1}{2}$$
$$\frac{3}{2}\cdot x^2-\frac{3}{2}\cdot x-\frac{5}{2}-\frac{1}{2}=0$$
$$\frac{3}{2}\cdot x^2-\frac{3}{2}\cdot x-\frac{6}{2}=0$$
$$\frac{3}{2}\cdot x^2-\frac{3}{2}\cdot x-3=0$$
En multipliant les deux membres par 2 :
$$3\cdot x^2-3\cdot x-6=0$$
En divisant les deux membres par 3 :
$$x^2-x-2=0$$
Le discriminant du polynôme du membre de gauche a pour valeur :
$$\Delta=b^2-4\cdot a\cdot c=(-1)^2-4\times 1\times(-2)=1+8=9$$
On a la simplication suivante : $\sqrt{\Delta}=\sqrt{9}=3$
Le discriminant étant strictement positif, cette équation admet les deux racines suivantes :
$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2\cdot a}=\frac{-(-1)-3}{2\times 1}=\frac{-2}{2}=-1$$
$$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2\cdot a}=\frac{-(-1)+3}{2\times 1}=\frac{4}{2}=2$$
b. Pour que la tangente (Δ) soit parallèle à la droite (d), il faut qu'elles aient le même coefficient directeur ; autrement dit, la tangente (Δ) doit posséder un coefficient directeur de $\frac{1}{2}$.
On déduit de la question précédente que (Δ) est la tangente à la courbe $\mathscr{C}_g$ au point d'abscisse 2.
L'image du nombre 2 par la fonction f a pour valeur :

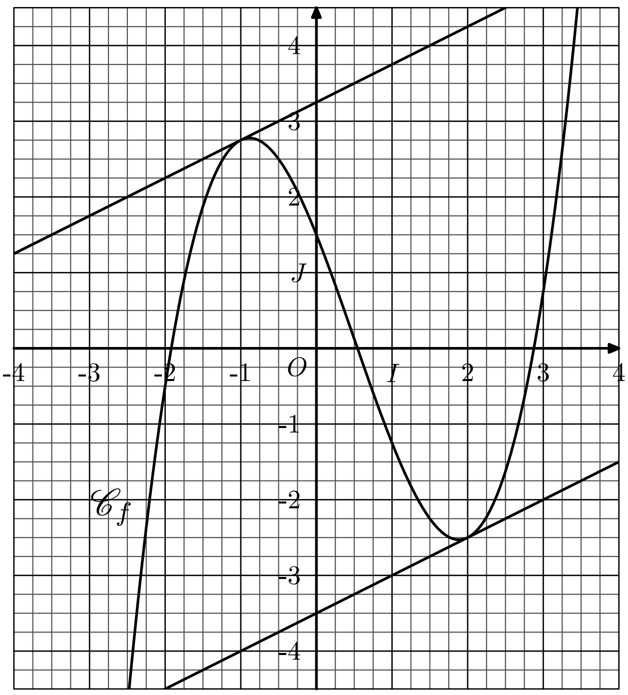
$$f(2) = \frac{1}{2}\times 2^3 - \frac{3}{4}\times 2^2 - \frac{5}{2}\times 2 + \frac{3}{2}$$
$$= 4 - 3 - 5 + \frac{3}{2} = -\frac{5}{2}$$

Ainsi, la droite (Δ) doit passer par le point de coordonnées $\left(2\,;-\frac{9}{2}\right)$.

L'équation de la droite (Δ) est de la forme :
$$y = \frac{1}{2}\cdot x + b$$

En utilisant le point $\left(2\,;-\frac{9}{2}\right)$:
$$-\frac{5}{2} = \frac{1}{2}\times 2 + b$$
$$-\frac{5}{2} = 1 + b$$
$$b = -\frac{5}{2} - 1$$
$$b = -\frac{7}{2}$$

Ainsi, la droite (Δ) a pour équation :
$$y = \frac{1}{2}\cdot x - \frac{7}{2}$$



Correction 4

a. La fonction f a pour expression :
$$f(x) = 3\times x^2$$
Ainsi, la fonction f' admet pour expression :
$$f'(x) = 3\times(2x) = 6\cdot x$$

b. La fonction g a pour expression :
$$g(x) = \frac{1}{12}x^6 = \frac{1}{12}\times x^6$$
Ainsi, la fonction g' admet pour expression :
$$g'(x) = \frac{1}{12}\times(6\cdot x^5) = \frac{1}{2}\cdot x^5$$

c. La fonction h a pour expression :
$$h(x) = 4\sqrt{x} = 4\times\sqrt{x}$$
Ainsi, la fonction h' admet pour expression :
$$h'(x) = 4\times\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{x}}$$

d. La fonction j a pour expression :
$$j(x) = \frac{\sqrt{x}}{2} = \frac{1}{2}\times\sqrt{x}$$
Ainsi, la fonction j' admet pour expression :
$$j'(x) = \frac{1}{2}\times\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{4\sqrt{x}}$$

e. La fonction k a pour expression :
$$k(x) = \frac{1}{2x} = \frac{1}{2}\times\frac{1}{x}$$
Ainsi, la fonction k' admet pour expression :
$$k'(x) = \frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{2x^2}$$

f. La fonction ℓ a pour expression :
$$l(x) = -\frac{2}{x} = -2\times\frac{1}{x}$$
Ainsi, la fonction ℓ' admet pour expression :
$$\ell'(x) = -2\times\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{2}{x^2}$$

Correction 5

a. Pour $f(x) = x - 2\sqrt{x}$, on a :
$$f'(x) = 1 - 2\times\frac{1}{2\sqrt{x}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}} = 1 - \frac{\sqrt{x}}{x}$$

b. La fonction dérivée de $g(x) = 2\times\frac{1}{x}$ est :
$$g'(x) = 2\times\left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{2}{x^2}$$

c. Soit $h(x) = \frac{-5}{x} + \sqrt{x}$, la fonction dérivée de h est :
$$h'(x) = -5\times\left(-\frac{1}{x^2}\right) + \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{5}{x^2} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$$
$$= \frac{5}{x^2} + \frac{\sqrt{x}}{2x} = \frac{10}{2x^2} + \frac{x\sqrt{x}}{2x^2} = \frac{10 + x\sqrt{x}}{2x^2}$$

d. On considère la fonction k définie par : $k(x) = x^2 - \frac{1}{x}$.
Sa fonction dérivée est :
$$k'(x) = 2x - \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 2x + \frac{1}{x^2}$$

Correction 6

1. L'expression de la fonction f est donnée sous la forme d'un produit de deux facteurs u et v dont les expressions sont :
$$u(x) = x^2 - 3\cdot x + 1 \quad ; \quad v(x) = 1 - 2x$$
qui admettent les deux fonctions dérivées suivantes :
$$u'(x) = 2\cdot x - 3 \quad ; \quad v'(x) = -2$$
La formule de dérivation d'un produit permet d'obtenir l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f :
$$f'(x) = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x)$$
$$= (2x - 3)\cdot(1 - 2\cdot x) + (x^2 - 3\cdot x + 1)\cdot(-2)$$
$$= 2\cdot x - 4\cdot x^2 - 3 + 6\cdot x - 2\cdot x^2 + 6\cdot x - 2$$
$$= -6\cdot x^2 + 14\cdot x - 5$$

2. L'expression de la fonction g est donnée sous la forme d'un produit de deux facteurs u et v dont les expressions sont :
$$u(x) = -x^3 + 2\cdot x + 3 \quad ; \quad v(x) = x^2 + 1$$
qui admettent les deux fonctions dérivées suivantes :
$$u'(x) = -3\cdot x^2 + 2 \quad ; \quad v'(x) = 2\cdot x$$
La formule de dérivation d'un produit permet d'obtenir

l'expression de la fonction g' dérivée de la fonction g:

$$\begin{aligned} g'(x) &= u'(x){\cdot}v(x) + u(x){\cdot}v'(x) \\ &= (-3{\cdot}x^2+2)(x^2+1) + (-x^3+2{\cdot}x+3){\cdot}2x \\ &= -3{\cdot}x^4 - 3{\cdot}x^2 + 2{\cdot}x^2 + 2 - 2{\cdot}x^4 + 4{\cdot}x^2 + 6{\cdot}x \\ &= -5{\cdot}x^4 + 3{\cdot}x^2 + 6{\cdot}x + 2 \end{aligned}$$

3. L'expression de la fonction h est donnée sous la forme d'un produit de deux facteurs u et v dont les expressions sont :

$$u(x) = x \quad ; \quad v(x) = x + \frac{1}{x}$$

qui admettent les deux fonctions dérivées suivantes:

$$u'(x) = 1 \quad ; \quad v'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$$

La formule de dérivation d'un produit permet d'obtenir l'expression de la fonction h' dérivée de la fonction h:

$$h'(x) = u'(x){\cdot}v(x) + u(x){\cdot}v'(x) = 1{\cdot}\Big(x+\frac{1}{x}\Big) + x{\cdot}\Big(1-\frac{1}{x^2}\Big)$$

$$= x + \frac{1}{x} + x - \frac{1}{x} = 2{\cdot}x$$

Correction 7

1. L'expression de la fonction f est donnée sous la forme du quotient de la fonction u par la focntion v où ces deux fonctions sont définies par : :

$$u(x) = 1 \quad ; \quad v(x) = x^5 + 1$$

qui admettent pour dérivée:

$$u'(x) = 0 \quad ; \quad v'(x) = 5{\cdot}x^4$$

La formule de dérivation du quotient permet d'obtenir l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f:

$$f'(x) = \frac{u'(x){\cdot}v(x) - u(x){\cdot}v'(x)}{\big[v(x)\big]^2} = \frac{0\times\big(x^5+1\big) - 1\times5x^4}{x^5+1}$$

$$= \frac{-5x^4}{x^5+1}$$

2. L'expression de la fonction g est définie par le quotient des fonctions u et v:

$$u(x) = 5{\cdot}x - 2 \quad ; \quad v(x) = 3{\cdot}x + 1$$

qui admettent pour dérivée:

$$u'(x) = 5 \quad ; \quad v'(x) = 3$$

La fonction g admet pour dérivée la fonction g' dont l'expression est:

$$g'(x) = \frac{u'(x){\cdot}v(x) - u(x){\cdot}v'(x)}{\big[v(x)\big]^2} = \frac{5{\cdot}(3{\cdot}x+1) - (5{\cdot}x-2){\cdot}3}{\big(3{\cdot}x+1\big)^2}$$

$$= \frac{15{\cdot}x + 5 - 15{\cdot}x + 6}{\big(3{\cdot}x+1\big)^2} = \frac{11}{\big(3{\cdot}x+1\big)^2}$$

3. La fonction h est définie par le quotient des fonction u et v où:

$$u(x) = x^2 - 3x + 1 \quad ; \quad v(x) = 2{\cdot}x + 1$$

qui admettent pour dérivée:

$$u'(x) = 2{\cdot}x - 3 \quad ; \quad v'(x) = 2$$

Ainsi, la dérivée h' de la fonction h admet pour dérivée:

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{u'(x){\cdot}v(x) - u(x){\cdot}v'(x)}{\big[v(x)\big]^2} \\ &= \frac{\big(2{\cdot}x-3\big){\cdot}\big(2{\cdot}x+1\big) - \big(x^2-3{\cdot}x+1\big){\cdot}2}{\big(2{\cdot}x+1\big)^2} \\ &= \frac{4x^2 + 2x - 6x - 3 - 2x^2 + 6x - 2}{\big(2{\cdot}x+1\big)^2} = \frac{2x^2+2x-5}{\big(2{\cdot}x+1\big)^2} \end{aligned}$$

